Wozu ist der Mathematikunterricht gut?

Günter Hanisch

1 Einleitung

Zur Vorbereitung dieses Beitrags stellte ich diese Frage Claudia, einer erfahrenen Mathematik-Physiklehrerin. Sie antwortete: „Das hab' ich mich auch schon gefragt und das würde mich auch interessieren!" und erzählte mir von einem Medizinstudenten, einem ihrer ehemaligen Schüler, der sie um Rat fragte, wie man das Netz für eine Schwimmbeckenabdeckung zeichnen kann - eine Aufgabe, die sich mit dem Mathematikstoff der Mittelstufe lösen ließ.

Des weiteren haben Studentinnen und Studenten eines Mathematikdidaktikseminars ihre Bekannten dazu befragt. Einige Kostproben möchte ich davon bringen:

1. Peter (19 Jahre alt, Jusstudent, hatte 12 Jahre Angst vor Mathematik und war ein „absoluter Blindgänger" in diesem Fach) meint, er verdanke die Fähigkeit, daß er über drei Zeilen Gesetzestext nicht hinwegliest, sondern imstande ist, den Text Wort für Wort zu analysieren, seiner engagierten Mathematiklehrerin.

2. Heidi (39 Jahre alt, PPP- und Deutschlehrerin, hatte ebenfalls immer Probleme mit Mathematik) ist der Überzeugung durch Mathematik soviel Gehirntraining erfahren zu haben, daß sie einen leichteren Zugang zu verschiedenen Philosophen gefunden hätte.

3. Harald (20 Jahre alt, AHS-Matura) kann zwar keinen praktischen Nutzen für sich aus der Mathematik erkennen, hatte aber sehr viel Spaß stundenlang an einem mathematischen Problem herumzutüfteln (so wie andere eben Schach spielen oder Rad fahren)

4. Martin (19 Jahre alt, Theologiestudent) meint, er wisse nicht, welchen Sinn der Mathematikunterricht habe, aber das sei nicht sein Problem, er habe ihn nicht erfunden.

5. Und wenn man dem „vox populi, vox dei" Glauben schenkt, noch ein paar weitere Meinungen: „Um die Schüler zu sekkieren!", „Damit die Mathematiklehrer nicht arbeitslos sind!" und „Weil es schon immer so war!"

Im folgenden Beitrag soll wissenschaftlich an das Problem herangegangen werden. Allerdings soll dabei nicht über die Bedeutung des Wortes „gut" geschrieben werden, also keine Abhandlung über Moralphilosophie entstehen, denn im folgenden soll die Frage so verstanden werden, wie sie auch die Interviewten verstanden haben, nämlich „Wem nützt der Mathematikunterricht?"

Dabei sind vier Personengruppen als Nutznießer auszumachen, nämlich

1. Schülerinnen bzw. Schüler,

2. Eltern,

3. Lehrerinnen bzw. Lehrer und die

4. Gesellschaft

Dabei decken sich aber die Anliegen von Eltern und Gesellschaft im Großen und Ganzen mit denen der Schülerinnen und Schüler, denn Eltern sind im allgemeinen die besten Anwälte ihrer Kinder, und auch die Gesellschaft, die ja für die Kosten des Mathematikunterrichts aufkommt, profitiert von gut ausgebildeten Schülerinnen und Schülern.

Die Lehrerinnen und Lehrer kann man in zwei Gruppen einteilen und zwar in

- Nicht-Mathematiklehrerinnen bzw. -lehrer

- Mathematiklehrerinnen bzw. -lehrer

Erste Gruppe kann in zweierlei Weise vom Mathematikunterricht profitieren, und zwar einerseits durch die dadurch möglichen Querverbindungen und andererseits durch die Chance auffällige Disziplinlosigkeiten in eher unauffällige umwandeln zu können, indem die Schülerinnen und Schüler, statt den Unterricht zu stören, friedlich ihre Mathematikhausübungen abschreiben.

Die Mathematiklehrerinnen bzw. -lehrer profitieren vom Mathematikunterricht, weil sie zum Teil für ihr Hobby bezahlt werden, denn nur wer Mathematik liebt, wird im allgemeinen auch Mathematik studieren, es sei denn es handelt sich um Masochisten.

Wir können uns daher im folgenden den Schülerinnen und Schülern zuwenden, und davon soll auch dieser Artikel handeln.

2 Ziele des Mathematikunterrichts

Die Ziele des Mathematikunterrichts finden sich in den verschiedenen Lehrplänen. Allerdings haben diese den Nachteil, daß sie einerseits zu unscharf sind, andererseits - zumindest für die Oberstufe - aber zu detailliert formuliert worden sind, so daß man den Wald vor lauter Bäumen nicht sieht.

Daher soll eine Schweizer Mathematikergruppe zu Wort kommen, die die Lehrziele des Mathematikunterrichts (WAHLEN 1985, S. 61) kurz und prägnant - wie folgt - formulierte: „Der neue Mathematikschüler

- kann dem Problem entsprechende Hilfsmittel auswählen und nach Bedarf und eigenem Können einsetzen,
- kann schwierige Texte erfassen, darin enthaltene mathematische Probleme formulieren und in die Symbolebene transferieren,
- kann Probleme in Teilprobleme zerlegen, analysieren und auflisten; dabei Wesentliches von Unwesentlichem trennen und rationelle Lösungswege suchen,
- kann gleich strukturierte Probleme als solche erkennen und gelernte Lösungen auf neue Probleme übertragen,
- hat den Mut und das Selbstvertrauen, seine schöpferischen Fähigkeiten zum Beschreiten neuer, unerprobter Wege einzusetzen,
- erkennt mathematische Probleme in seiner Umwelt als solche,
- kann Probleme und Lösungen schrittweise, übersichtlich, klar und sauber darstellen oder wiedergeben,
- kann einmal Gelerntes wieder anwenden und beherrscht die der Stufe angepaßten Grundtechniken,
- kann längere Zeit intensiv an einem Problem arbeiten,
- ist tolerant und bereit, Lösungswege gemeinsam zu suchen und sein Wissen anderen zur Verfügung zu stellen."

Ganz allgemein lassen sich die Lehrziele nach THURLER in zwei Kategorien aufteilen und zwar:

1. „Die Ziele der ersten Kategorie beziehen sich auf den prozeßorientierten Unterricht, auf die allgemeinen Lernziele: der Mathematikunterricht soll die Entwicklung einer forschenden Grundhaltung und des logischen Denkens sowie die Entwicklung des objektiven Urteilsvermögens des Schülers fördern.

2. Die zweite Kategorie bezieht sich aber eher auf die produktorientierten fachspezifischen Stofflernziele eines Mathematikunterrichts, der zuverlässige mathematische Fertigkeiten vermitteln soll" (1985, S. 9).

Zu einem ähnlichen Schluß kommt auch FÜREDER, der zwischen folgenden Aspekten unterscheidet:

1. „Die Vermittlung von Fertigkeiten für die Anwendbarkeit der Mathematik und für einen weiterführenden Unterricht.

2. Ein Beitrag zur allgemeinen Denkerziehung durch kreatives Problemlösen" (1980, S. 157).

Sowohl die Einteilung von THURLER als auch die von FÜREDER haben meines Erachtens den Nachteil, daß sie zum Teil zu weit, zum Teil zu eng sind: Zu den allgemeinen Lehrzielen des Mathematikunterrichts gehört etwa auch die Entwicklung der Raumvorstellung, die oben nicht enthalten ist, zusätzlich muß bei den fachspezifischen Stofflehrzielen unterschieden werden zwischen solchen, die hic et nunc unterrichtet werden, wie etwa „Auflösen des rechtwinkeligen Dreiecks" und solchen, die dabei weiter verfestigt werden, wie etwa das Umformen von Gleichungen.

Einen anderen Weg gingen JOLLIFE und PONSFORD (1989), die ausgehend von der BLOOMschen Taxonomie, nämlich

- Wissen
- Verstehen
- Anwenden
- Analyse
- Synthese und
- Bewerten,

Faktorenanalysen untersuchten. Sie kamen zum Schluß, jeden der BLOOMschen Punkte in zwei Faktoren zu zerlegen, nämlich in „Begriffe" und in „Berechnen". In dieser Taxonomie fehlen aber wieder Lehrziele wie etwa die Entwicklung der Raumvorstellung.

Diesen Fehler hat TREUMANN (1974) vermieden, der versucht hat, „die Ergebnisse von 30 faktorenanalytischen Untersuchungen zu vergleichen, gemeinsame Merkmale mathematischer Fähigkeiten herauszuarbeiten und diese auf ihre pädagogische Bedeutsamkeit hin zu überprüfen. Dabei hat er die folgenden für die Mathematik wichtigen Fähigkeiten isoliert:

A Rechenfertigkeit

B Sprachverständnis

C Raumvorstellung

D Schlußfolgerndes Denken

E Mathematisches Wissen

Die ersten vier Fähigkeiten entsprechen Intelligenzfaktoren, die die Intelligenzforschung identifiziert hat" (zit. nach WINGERT 1983, S. 384f), wobei sich der Faktor D noch weiter in die drei Teilfaktoren allgemeines Denken, Deduktion und Induktion aufgliedern läßt.

Der Mathematikunterricht vermittelt eben sowohl materiale als auch formale Ziele. Wie oben schon näher ausgeführt wird unter ersteren der Lehrstoff verstanden, unter letzteren jene bildungsrelevanten Erscheinungen, die durch die Beschäftigung mit dem Lehrstoff entstehen. KERSCHENSTEINER drückte dies einmal etwas überspitzt mit „Bildung ist das, was übrigbleibt, wenn man alles Gelernte vergessen hat." aus. Wie der Autor gemeinsam mit SCHWENDENWEIN (1986, S. 722ff u. 1990, S. 39ff) (siehe auch SCHWENDENWEIN 1994) allerdings dargelegt hat, gibt es noch etwas, das zwischen den formalen und den materialen Zielen liegt, nämlich Lehrziele wie etwa Rechentechnik (algebraisch und numerisch), Sachverhaltsdarstellungen und Problemlösungsstrategien. Das gilt aber analog nicht nur für Mathematik, sondern auch für die anderen Unterrichtsgegenstände. Man kann somit für **alle** Unterrichtsgegenstände folgende **präzisere** Einteilung treffen:

1. *Fachbezogene Lehrziele* sind inhaltlich akzentuierte und relativ eindeutig abgrenzbare Teilbereiche innerhalb ein und desselben Unterrichtsfaches, die in Lehrplänen unter dem geläufigen Begriff „Lehrstoff" (einer bestimmten Schulstufe eines bestimmten Schultyps) anzutreffen sind.

2. *Interaktive Lehrziele* sind grundlegende Fähigkeiten, die sich aus früher erworbenen fachbezogenen Lehrzielen entwickelt haben, für den Erwerb weiterer fachlicher Lehrziele als notwendige Voraussetzungen anzusehen sind und durch (häufigen) Gebrauch in der Regel eine Verbesserung erfahren.

3. *Latente Lehrziele* setzen sich aus drei Untergruppen sich veränderbarer Lehrzielen zusammen und zwar aus

   (a) *kognitiven*,

   (b) *affektiv-sozialen* und

   (c) *psychomotorischen*.

Diese drei Untergruppen können sich primär durch Beschäftigung mit Inhalten fachbezogener Lehrzielen gegenstandsakzentuiert weiterentwickeln. Wegen ihrer Transfereffekte stellen sie dringend erwünschte Produkte pädagogisierter Lernprozesse dar. Bildungstheoretisch könnte man sagen, daß eine gezielte pädagogisierte Vermittlung sowohl fachbezogener als auch interaktiver Lehrziele beim Heranwachsenden *materiale bzw. funktionale Bildungswirkungen* und die dabei freiwerdenden latenten Lehrziele die eher dauerhafteren *formalen Bildungswirkungen* hervorrufen.

Jene kognitiven, affektiv-sozialen und psychomotorischen Lehrziele, die sich praktisch in jedem Unterrichtsfach in irgend einer Form freisetzen können – allerdings immer nur speziell inhaltsakzentuiert (so besitzen beispielsweise die latenten Lehrziele „Strukturieren (können)" oder „Interpretieren (können)" in Mathematik eine andere Bedeutung als in Deutsch) – werden als *(allgemeine) Standardsets* bezeichnet:

(a) Der *kognitive Standardset* umfaßt folgende 10 Lehrziele: Konkretisieren, Abstrahieren, Strukturieren, Kombinieren, Interpretieren, kritisches Denken, Sprachverständnis, Zielgerichtetheit und Lerntempo.

(b) Der *affektiv-soziale Standardset* umfaßt ebenfalls 10 Lehrziele: nämlich Fachinteresse, Interessensstabilität, Anspruchsniveau, Eigeninitiative, Engagement, Frustrationstoleranz, Anstrengungsstabilität, Konzentrationsfähigkeit, Belastbarkeit, Übungs- und Verbesserungsbereitschaft.

(c) Der *psychomotorische Standardset* umfaßt folgende 2 Lehrziele: Feinkoordination (Genauigkeit) und Arbeitstempo.

Diese drei verschiedenen Standardsets latenter Lehrziele, die im allgemeinen für jedes Unterrichtsfach aktuell sind, können um sogenannte *gegenstandsspezifische latente Lehrziele* erweitert werden. Gegenstandsspezifische Lehrziele (kognitive, affektiv-soziale und psychomotorische) sind solche, die nicht in der Auseinandersetzung mit jedem beliebigem Unterrichtsfach in einem besonders hohen Ausmaß freigesetzt werden können. So können beispielsweise gegenstandsspezifische kognitive Lehrziele wie etwa Raumvorstellung oder Schätzen in keinem anderen Unterrichtsfach den Schülerinnen und Schülern so gut näher gebracht werden wie in Mathematik. Aber auch affektiv-soziale Lehrziele können hervorragend im Mathematikunterricht gefördert werden. Insbesondere kann der Mathematikunterricht zum Erlernen und Einüben affektiver Verhaltensweisen dienen (siehe später).

Aus dieser Erkenntnis heraus sind daher im jeweiligen Standardset gegenstandsakzentuierte Ausformungen bei der Schülerin bzw. beim Schüler umso eher zu erwarten, wenn ein allgemeinbildender Fächerkanon in der Weise pädagogisiert vermittelt wird, daß in jedem dieser Unterrichtsfächer jeweils von der Lehrkraft ausgewählte Lehrziele der drei verschiedenen Standardsets mittels einer entsprechenden Unterrichtsgestaltung zu realisieren versucht werden. Besonders wichtig dabei ist, daß der Lehrkraft selbst die gegenstandsspezifischen Lehrziele bewußt sind und sie auch danach den Unterricht plant, vorbereitet und durchführt, daß sie aber zusätzlich beim Unterrichten außer den fachbezogenen Lehrzielen auch das eine oder andere latente (sowohl allgemeine als auch gegenstandsspezifische) Lehrziel im Auge hat.

Der Vorteil obiger Einteilung ist nun der, daß ersichtlich wird, wie verschiedene Unterrichtsfächer zur Freisetzung (Aktivierung, Förderung, Verbesserung) unterschiedlicher über die allgemeinen Standardsets hinausgehender (gegenstandsspezifischer) Lehrziele besonders geeignet sind.

In diesem Sinn wird also Allgemeinbildung nicht nur als Produkt von einem entsprechend definierten Fächerkanon bestimmt, sondern auch vom Realisierungsgrad der gegenstandsakzentuierten Standardsets sowie insbesondere von jenem der gegenstandsspezifischen Lehrziele. Tabelle 1 zeigt die Lehrziele in Mathematik.

Lehrziele in Mathematik	
Fachbezogene	Arithmetik, Algebra, Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung usf., Beweisführung
Interaktive	Fachbegriffe, Symbolbeherrschung, Modellbildung, Rechentechnik (sowohl numerisch als auch algebraisch), Problemlösungsstrategien, Sachverhaltsdarstellung
Latente	*Kognitive:* Standardset sowie Raumvorstellung, Schätzen *Affektive:* Standardset sowie Sauberkeit, Sorgfalt, Selbstkontrolle, Kooperation, Regeln einhalten *Psychomotorische:* Standardset

Tabelle 1: Lehrziele in Mathematik

Und – wie es REICHEL ausdrückt – ist es ein Kennzeichen des gebildeten Menschen, „daß er über eine Vielzahl von Sichtweisen und Strategien“ (1993, S. 115) verfügt.

Um nachzuweisen, daß die latenten Lehrziele, obwohl sie relativ stabile Intelligenz- und Persönlichkeitsfaktoren sind, durch schulische Einflüsse veränderbar sind, wurden vom Autor folgende zwei Untersuchungen durchgeführt:

1. Veränderung der Testscores von Intelligenzfaktoren durch schulischen Unterricht und

2. Veränderung der Raumvorstellung durch Unterricht in „Darstellender Geometrie".

Ad 1: *Veränderung der Testscores von Intelligenzfaktoren*
Diese Untersuchung wurde an Studierenden des G u. RG für Berufstätige in Wien durchgeführt. Dort wurden die Studierenden des 1. Semesters mit einem Subset des Leistungsprüfsystems (=LPS) von HORN (1962) getestet und diejenigen, die ohne Semesterverlust ins 9. Semester gekommen waren, noch einmal überprüft (HANISCH 1985c, S. 29f). Dabei stellte sich heraus, daß sowohl die Testscores des Intelligenzfaktors des 16PF von CATTELL signifikant zunahmen als auch die der Subtests des LPS von HORN (1962), und zwar die Faktoren Allgemeinbildung und Kombinationsgabe (siehe Tabelle 2). Diese Zunahme ist um so bemerkenswerter, als sie auf einer Stichprobe von nur 14 Personen beruht, d.h., daß die Änderungen schon sehr massiv sein müssen, damit sich bei einer so kleinen Stichprobe signifikante Ergebnisse zeigen.

Faktoren	Mittelwerte		Signifikanz
	vorher	nachher	
Allgemeinbildung	6,1	7,0	98%
Logisches Denken	6,4	7,1	94%
Wortflüssigkeit	6,4	6,7	41%
Raumvorstellung	6,2	6,7	74%
Kombinationsgabe	5,9	6,5	97%
Wahrnehmungstempo	5,4	5,8	52%
Schnelles Addieren	5,4	5,5	06%
Intelligenzfaktor 16PF	5,1	6,9	99%

Tabelle 2: Wirkung des Schulunterrichts auf Intelligenzfaktoren

Obwohl bei dieser Untersuchung die Kontrollgruppe fehlt, ist aus der Literatur bekannt (siehe etwa OLECHOWSKI 1969, S. 85ff), daß solche massiven Veränderungen ohne äußere Einflüsse nicht erwartet werden können.

Ad 2: *Veränderung der Raumvorstellung*
Eine Längsschnittuntersuchung über zwei Jahre (n=313) an Schülerinnen bzw. Schülern der 6. (n=655) und der 8. Klasse (n=383) zeigte bei allen eine Zunahme der Raumvorstellung. Diese war aber bei jenen, die zwei Jahre Unterricht in Darstellender Geometrie gehabt hatten, (signifikant) größer als bei jenen ohne Darstellenden Geometrieunterricht. Dadurch konnte exemplarisch gezeigt werden, daß es möglich ist, durch schulischen Unterricht auf der Oberstufe Intelligenzfaktoren so zu beeinflussen, daß dies testmäßig nachgewiesen werden kann.

Ein theoretischer Bezugsrahmen zum Begriff Raumvorstellung findet sich in HANISCH 1984b. Die Teilergebnisse, die sich auf die 6. Klassen beziehen, wurden bereits in HANISCH 1985d veröffentlicht, ein Kurzbericht dieser Untersuchung erschien in HANISCH 1989, S. 171ff, detaillierte Ergebnisse können in HANISCH 1990a, S. 26ff nachgelesen werden. Als Raumvorstellungstest wurde der 3D-Würfeltest (GITTLER 1990) verwendet, weil dessen Items mit dem logistischen Testmodell von RASCH (siehe hinzu HANISCH 1990b, S. 350ff) auf Homogenität geprüft worden sind.

Zu denselben Ergebnissen (allerdings aus demselben Datensatz) kam auch GITTLER (1994 und 1992?[1]), der bei der Erhebung der Daten zum Zweck der Eichung seines Raumvorstellungstests mitbeteiligt war.

3 Warum ist Mathematik dann so verhaßt?

„Wenn ich die Ehre und die Freude habe, als Hausherr diese Versammlung[2] zu begrüßen, so erlauben Sie mir bitte eine persönliche Bemerkung; daß ich es nämlich als einer der schlechtesten Mathematiker meiner Klasse nie für möglich gehalten hätte, je in diese Situation zu kommen... So möchte ich ... Ihnen sagen, daß gerade wir unbegabten Mathematik-Schüler doch ein wenig begriffen haben, was sie uns in unglücklicher Liebesmüh' beizubringen suchten, und daß ihr Dienst doch nicht ganz vergeblich ist. Vielleicht sind wir sogar in besonderer Weise ... befugt, über die Bildungsgehalte der Mathematik mitzureden. Denn wir haben nicht nur mehr unter ihr gelitten – und im Leiden wird man bekanntlich wissender! –, sondern wir erfüllen in besonderer Weise alle Postulate, die KERSCHENSTEINER über die Bildung aufstellt: Wir haben nicht nur alles vergessen, sondern wir haben es schon vorher gar nicht ganz begriffen: Was bei *uns* übrigbleibt, das muß wirklich einen Bildungserweis ersten Ranges darstellen.“ Mit diesen Worten eröffnete der damalige Präsident der Rektorenkonferenz in Deutschland THIELICKE (1965, zit. aus FÖLSCH, 1985, S. 15) einen Mathematikerkongreß. Aus seinen Worten klingt nicht nur die Ironie über den Bildungsgehalt der Mathematik heraus, sondern auch eine tiefe Ablehnung, die aus seiner Schulzeit stammt. Wieso war es nicht möglich, dieses hochbegabte Kind für Mathematik zu begeistern? Wäre er ein Einzelfall, könnte man die Schuld seinen Mathematiklehrerinnen bzw. -lehrern geben. Wie Sie aber wissen, ist er kein Einzelfall.

Dabei ist die Ausbildung der Mathematiklehrerinnen und -lehrer sicher nicht schlechter als die der Lehrerinnen und Lehrer der anderen Unterrichtsfächer. Um sich für eine Prüfung in Mathematik vorzubereiten, braucht man meist länger als für eine der anderen Fächer[3]. Auch in Didaktik braucht die Ausbildung den Vergleich mit anderen Studienfächern sicher nicht zu scheuen, und in Pädagogik

[1] Aus dem Literaturverzeichnis von GITTLER (1994) geht hervor, daß seine Habilitation sich um dieses Thema dreht; jene liegt aber leider in keiner öffentlichen Bibliothek auf.

[2] Mathematikerkongreß in der Universität Tübingen [Anmerkung des Autors]

[3] Bislang unveröffentlichtes Ergebnis einer Untersuchung des Autors

erfahren alle Lehramtsstudentinnen bzw. -studenten (ausgenommen PPP) dieselbe Ausbildung. Was sind also die Gründe dafür, daß Mathematik trotz der gut ausgebildeten Lehrerinnen und Lehrer so verhaßt ist?

Meines Erachtens sind mehrere Gründe dafür zu nennen:

- Den Mathematikstoff verständlich zu machen, ist schwerer als den Lehrstoff vieler anderer Unterrichtsfächer. So konnte der Autor zeigen, daß Mathematik neben Englisch und Latein zu den Fächern gehört, in denen am meisten geschummelt wird (vgl. HANISCH 1991).

- In Mathematik ist exaktes und präzises Wissen notwendig; dies bezieht sich auch auf die interaktiven Lernziele. Gerade bei diesen aber haben Schülerinnen und Schüler oft große Lücken. Ein Beispiel mag dies illustrieren. Zur schriftlichen Reifeprüfung gab der Autor folgende Extremwertaufgabe (vgl. HANISCH 1985c): Das Parabelstück $y = a - 2px$ mit $0 \leq y \leq a$ dreht sich um die y-Achse. Dem entstehenden Drehparaboloid ist der volumsgrößte Drehzylinder (Achse = y-Achse) einzuschreiben. Berechne, wieviel Prozent des Drehparaboloidvolumens der Drehzylinder einnimmt.
  Das Problem für die Schülerinnen und Schüler war nicht die Extremwertaufgabe und auch nicht die Volumsberechnung, das Problem war die Prozentrechnung!

- Mathematik bietet zwar Abwechslung im Schulunterricht, aber es bedarf eines anderen Vorgehens. So wird etwa beim heutigen modernen Sprachunterricht eine eher intuitive Lehrmethode angewandt, während im Mathematikunterricht eher analytisch vorgegangen wird. Schülerinnen und Schüler müssen daher ein eigenes Metalernen (bekannt unter dem Schlagwort „Lernen lernen") für Mathematik erwerben.

- Obwohl MESCHKOWSKI einen erfahrenen Schulmathematiker mit den Worten: „Es gibt nur zwei Arten von Menschen: Mathematiker und Idioten", zitiert und dies erläutert mit: „Jeder, der über normale Geistesgaben verfügt, kann auch die ‚Wissenschaft von den formalen Systemen' verstehen. Die Mathematik ist nicht eine Geheimwissenschaft für eine Gruppe von Menschen mit einer Sonderbegabung"(1965, zit. aus FÖLSCH, 1985, S. 16), ist der Autor doch der Meinung, daß es für Mathematik einer gewissen Begabung bedarf, die aber nicht angeboren, sondern anerzogen ist. Als Beweis für letzteres mögen die Untersuchungen über geschlechtsspezifische Unterschiede herhalten:
  So zeigten BRANDON u. JORDAN (1994), daß die Mädchen auf Hawaii in Mathematik bessere Leistungen erbringen als die Jungen und daß dieser Unterschied bei Nichtweißen noch größer ist. Als Erklärung wird u.a. gegeben, „daß die geschlechtsspezifischen Leistungsunterschiede aus der stärkeren Akzeptanz der Bedeutung schulischer Leistungen bzw. entsprechender

Leistungsziele durch die Mädchen resultieren" (1994, S. 18).
Allerdings sind auch die Schülerinnen und Schüler der Meinung, daß für Mathematik Begabung notwendig ist, denn die Gründe, die sie für ihr Schummeln angaben, unterscheiden sich zwischen Mathematik und Englisch bzw. Latein wesentlich (siehe Tabelle 3), denn Schummeln in Mathematik wird - im Gegensatz zu Latein und Englisch - eher auf mangelnde Begabung als auf Faulheit zurückgeführt.

Weil ich ...	in diesem Fach unbegabt...			zum Lernen zu faul bin		
	Mathem.	Englisch	Latein	Mathem.	Englisch	Latein
ja	10	1	1	10	12	8
eher ja	11	6	5	5	7	11
kann sein	5	9	11	8	6	5
eher nein	15	7	11	9	6	10
nein	18	17	11	27	9	6
	χ^2-Wert=16,75; Sign.=96,7%			χ^2-Wert=17,39; Sign.=97,4%		

Tabelle 3: Antworten auf die Frage nach dem Schummelgrund

- Allerdings ist es nun nicht wieder so, daß die mathematische Begabung isoliert von den anderen Fächern gesehen werden kann, denn untersucht man den Zusammenhang der Schulnoten untereinander, so stellt sich heraus, daß diese fast durchwegs positiv (allerdings nicht immer signifikant) miteinander korrrelieren (siehe Tabelle 4 aus HANISCH 1985d, S. 88).

Was heißt das für unser Thema? Die ursprüngliche Frage ist falsch, d.h. nicht sinnvoll gestellt! Sie sollte lauten: „Wozu ist **Ihr** Mathematikunterricht gut?" Werden in Ihrem Unterricht die Schülerinnen und Schüler ermutigt, werden sie insbesondere gelobt (nicht nur einige wenige), erleben sie Hilfe bei Schwierigkeiten oder dient Ihr Mathematikunterricht vor allem dem Erlernen von Frustrationstoleranz?

So wurde von REICHEL u. HUMENBERGER (1995) Lehrerinnen bzw. Lehrern und Schülerinnen bzw. Schülern ein Fragebogen vorgelegt, mit dem die Erfahrungen mit dem Mathematikunterricht ausgedrückt werden konnten. Eine vom Autor durchgeführte Clusteranalyse konnte die Befragten in zwei Gruppen einteilen: In Gruppe 1 befinden sich diejenigen, die einen konventionellen Unterricht erleben, in dem die Schülerinnen und Schüler weniger begründen und weniger Sachverhalte beschreiben, hingegen aber mehr von der Tafel abschreiben, also insgesamt weniger selbständig arbeiten, wogegen der Gruppe 2 jene Personen zugeordnet wurden, die einen Mathematikunterricht beschreiben, in dem es mehr auf die Selbständigkeit der Schülerinnen und Schüler ankommt.

Korrelationsmatrix 6.Klasse																
	M	Inst	Gr	Phy	Ch	Geo	BE	Lat	Bio	D	ME	Fr	LÜ	Ge	E	Rel
Mathem.	1,00	0,31	0,70	0,55	0,42	0,40	0,19	0,45	0,41	0,34	0,30	0,47	0,01	0,32	0,39	0,19
Instr.m.	0,31	1,00	-	0,25	-	0,30	0,16	0,01	0,34	-,01	0,34	0,21	0,10	0,05	0,26	0,03
Griech.	0,70	-	1,00	0,56	-	0,52	0,41	0,65	0,56	0,40	0,42	-	0,22	0,40	0,52	0,28
Physik	0,55	0,25	0,56	1,00	0,47	0,44	0,22	0,40	0,46	0,31	0,38	0,34	0,05	0,40	0,35	0,24
Chemie	0,42	0,21	-	0,47	1,00	0,41	0,26	0,39	0,42	0,34	0,40	0,35	0,16	0,40	0,33	0,34
Geogr.	0,40	0,30	0,52	0,44	0,41	1,00	0,24	0,41	0,49	0,36	0,43	0,43	0,12	0,54	0,38	0,33
Bild.Erz	0,19	0,16	0,41	0,22	0,26	0,24	1,00	0,15	0,30	0,26	0,31	0,28	0,20	0,17	0,18	0,30
Latein	0,45	0,01	0,65	0,40	0,39	0,41	0,15	1,00	0,35	0,43	0,29	0,52	0,06	0,38	0,40	0,28
Biologie	0,41	0,34	0,56	0,46	0,42	0,49	0,30	0,35	1,00	0,41	0,40	0,37	0,15	0,45	0,36	0,27
Deutsch	0,34	-,01	0,40	0,31	0,34	0,36	0,26	0,43	0,41	1,00	0,31	0,43	0,05	0,36	0,44	0,28
Musikerz	0,30	0,34	0,42	0,38	0,40	0,43	0,31	0,29	0,40	0,31	1,00	0,38	0,20	0,30	0,31	0,39
Franz.	0,47	0,21	-	0,34	0,35	0,43	0,28	0,52	0,37	0,43	0,38	1,00	0,10	0,31	0,50	0,27
Leibesüb	0,01	0,10	0,22	0,05	0,16	0,12	0,20	0,06	0,15	0,05	0,20	0,10	1,00	0,11	0,08	0,22
Gesch.	0,32	0,05	0,40	0,40	0,40	0,54	0,17	0,38	0,45	0,36	0,30	0,31	0,11	1,00	0,36	0,35
Englisch	0,39	0,26	0,52	0,35	0,33	0,38	0,18	0,40	0,36	0,44	0,31	0,50	0,08	0,36	1,00	0,29
Religion	0,19	0,03	0,28	0,24	0,34	0,33	0,30	0,28	0,27	0,28	0,39	0,27	0,22	0,35	0,29	1,00

Tabelle 4: Korrelationen zwischen den Schulnoten (6. Klasse)

Interessant war es nun zu betrachten, wie die Schülerinnen und Schüler ihren Mathematikunterricht sehen und wie dieser von den Lehrerinnen bzw. Lehrern erlebt wird: Nur etwa 20% der Schülerinnen bzw. Schüler sind in Gruppe 2, aber 80% der Lehrerinnen bzw. Lehrer! Das heißt, der Mathematikunterricht wird von Schülerinnen und Schülern ganz anders erlebt als von Lehrerinnen und Lehrern. Letzteren ist dringend anzuraten ihren blinden Fleck zu verkleinern, indem sie mit ihren Schülerinnen und Schülern über den Mathematikunterricht sprechen, wobei sie sowohl ihre Vorstellungen darlegen als auch erfahren, was ihre Schülerinnen und Schüler empfinden.

Durch welche Argumente die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler korrigiert werden können, soll nun im folgenden behandelt werden.

4 Argumente für den Mathematikunterricht

4.1 Materiale Ziele

Machen wir ein Gedankenexperiment: Alle Kulturgüter, die wir mathematischen Kenntnissen mittelbar oder unmittelbar verdanken, mögen verschwinden. Was bleibt über? Fast nichts! Keine Wirtschaft, keine Technik, kein ...! Aber auch wenn wir nur den Mathematiklehrstoff ab der 9. Schulstufe zum Verschwinden brächten, würden wir um Jahrhunderte in unserer kulturellen Entwicklung zurückfallen. Der Autor dieser Zeilen wäre beispielsweise schon längst tot - nicht weil er als Mathematiklehrer dann verhungert wäre - sondern weil er ohne entsprechende Medizintechnik bei einer Operation nicht überlebt hätte.

Mathematisches Wissen ist also für unsere Kultur unabdingbar. Allerdings ist es so, daß nicht alle denselben Wissensstand brauchen, weil es in unserer arbeitsteiligen Gesellschaft genügt, wenn einige Spezialisten dieses Wissen haben. Und es ist in der Tat so, daß, je höher die Schulstufe ist, man umso weniger mathematisches Wissen braucht, um sein „Privatleben" bewältigen zu können. Der Autor selbst hat eigentlich vom mathematischen Wissen der Oberstufe nie etwas „privat" (ausgenommen als Wissensbank für seine Mathematik lernenden Kinder) gebraucht.

Noch etwas kommt dazu. Das mathematische Wissen wird sehr schnell vergessen. Das mag das folgende Untersuchungsergebnis zeigen, daß mit Hilfe von Studentinnen und Studenten des Mathematischen Instituts der Universität Wien gewonnen wurde (HANISCH 1985b): Es wurden Personen, deren Reifeprüfung länger als fünf Jahre zurückliegt, unter anderem danach gefragt, was sie noch über das Differenzieren wissen. Sie gaben Antworten wie etwa „Das ist das mit dem Strich." oder „Es gibt eine Formel

$$\frac{u'v - v'u}{?}$$

und eine innere und eine äußere Ableitung - aber wozu das gut ist, weiß ich nicht", oder „Damit habe ich nie etwas anfangen können", oder „Das ist das, was ich nie gekonnt habe." Interessant war, daß die Befragten sich zwar teilweise noch an einzelne Formeln erinnern konnten, aber wozu diese gehören, was man damit tut, das wurde nicht gewußt. Wenn Ihre Frustrationstoleranz groß ist, dann können Sie die Befragung anläßlich eines zehnjährigen Maturajubiläums wiederholen.

Allerdings sind Mathematikkenntnisse Voraussetzung für eine Reihe von Universitätsstudien, und zwar nicht nur für die technischen Studienrichtungen oder für die Universität für Bodenkultur, sondern auch für Wirtschaftswissenschaften, für Psychologie und Soziologie, für Veterinärmedizin usf. Ohne den Nachweis ausreichender Mathematikkenntnisse wären daher die Universitäten genötigt, entsprechende Zusatzprüfungen zu verlangen (wie es etwa bei fehlendem Latein oder Darstellender Geometrie der Fall ist). Natürlich wäre eine Variante denkbar, bei der die Schülerinnen und die Schüler Mathematik abwählen könnten. Aber das hieße, sehr viel Verantwortung auf die Schultern eines/r Vierzehnjährigen zu legen. Der Autor wußte beispielsweise in diesem Alter noch nicht, welchen Berufsweg er einmal einschlagen wird.

Ein weiterer Gedankengang ist folgender: Das mathematische Wissen hat sich aus vier Tätigkeiten entwickelt, und zwar aus dem Zählen, dem Messen, dem Zeichnen und dem Schätzen. Aus ersterem wurde die Algebra, aus dem Zweiten die

Analysis, aus dem Dritten die Geometrie und aus dem Schätzen die Stochastik. Anders ausgedrückt: Mathematik ist eine Fortführung dieser Kulturtechniken. Nehmen wir eine der Säulen weg, steht das Gebäude nicht mehr sicher.

Kein Wunder, daß die frühen Kulturen ihren Aufschwung mit der Mathematik nahmen; Mathematik war und ist unerläßlich für die Vorratswirtschaft, für die Aufteilung von Grund und Boden, für den Kalender, zur Steuereinhebung, für Wahlen, für die öffentliche Statistik, für die volkswirtschaftliche Gesamtrechnung, für die Verteidigung und leider auch für den Angriff und für vieles mehr.

In einem Mathematikunterricht, wie er dem Autor vorschwebt, sollten die SchülerInnen auch über diese Bedeutung der Mathematik informiert werden. Anders ausgedrückt, die Anwendungen sollten nicht zu kurz kommen. Anwendungen steigern nämlich die Motivation (vgl. LEHMANN 1981) vor allem bei leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern (vgl. POLLIN 1980 und ROTH 1982, zit. aus KAISER-MESSMER 1986, S. 208).

Ob allerdings Schülerinnen und Schülern Anwendungen leicht fallen, hängt von zwei Dingen ab, die miteinander zusammenhängen, nämlich

1. wie genau sich die Anwendung mit dem gelernten Wissen deckt und

2. ob ein Metawissen über Anwendungen gelernt wurde.

Je weiter nämlich eine Anwendung vom gelernten Wissen entfernt liegt, desto eher bedarf es konkreter Strategien, die jemanden befähigen, dieses Wissen auch einzusetzen. Ein Beispiel, das der Autor Mathematikstudentinnen und -studenten bei einem Derive-Seminar stellte und das ihnen allen sehr schwer fiel, mag dies erläutern:

Bei (fast) jeder Autoreklame finden sich die Werte für den Treibstoffverbrauch bei 90 km/h, bei 120 km/h und bei Stadtfahrten. Wählen Sie ein Automodell und bestimmen Sie, bei welcher Geschwindigkeit am wenigsten Treibstoff verbraucht wird!

Wir können davon ausgehen, daß die Mathematikstudentinnen und -studenten sicher die dafür notwendige Mathematik beherrschten. Aber sie hatten noch nie eine ähnliche Aufgabe gelöst, eine Aufgabe, bei der so wenig festgelegt war, eine Aufgabe, wo man auf Grund seines Wissens selbst Annahmen treffen muß.

REICHEL u. HUMENBERGER (1995) legten Lehrerinnen und Lehrern einen Fragebogen vor, um Argumente für und wider einen angewandten Mathematikunterricht zu erfassen. In einer vom Autor durchgeführten Clusteranalyse konnten die Befragten in drei Gruppen eingeteilt werden, und zwar

1. Befürworter vor allem auf Grund der Praxisrelevanz (ca. 45%): diese meinen, daß etwa zur Hälfte echte Anwendungen im Mathematikunterricht vorkommen sollten; sie glauben auch, daß im Unterricht häufig Anwendungen

vorkommen, und bemängeln weiters, daß zu wenig Beispiele im Lehrbuch angeführt sind. Sie führen selbst im Mathematikunterricht Anwendungen durch.

2. Befürworter wegen der Bildungsziele (ca. 27,5%): sie ziehen einfache Anwendungen vor, glauben aber, daß im Unterricht sehr selten Anwendungen vorkommen; sie bemängeln ebenfalls zu wenig Beispiele im Lehrbuch, klagen über mangelnde eigene Kompetenz und versuchen im Mathematikunterricht Anwendungen durchzuführen.

3. Skeptiker (ca. 27,5%): sie finden, daß im Mathematikunterricht einfache Anwendungen vorkommen sollten, glauben aber, daß im Unterricht selten Anwendungen vorkommen und führen selbst keine durch.

4.2 Formale Ziele

„Die klassische deutsche Bildungstheorie hat der formalbildenden Kraft der Mathematik (neben den alten Sprachen) ein besonderes Gewicht zugemessen, indem sie annahm, daß die Beschäftigung mit Mathematik gewissermaßen ‚neutrale' Kräfte erwecken würde (Verstandeskraft, Denkfähigkeit, Gedächtnis, Fähigkeit zum logischen Denken, Beobachtungsfähigkeit), die dann automatisch die Erschließung auch anderer Sachverhalte erleichtern." (WITTMANN, 1981, S. 45). Allerdings ist – wie WITTMANN anschließend darlegt – die Idee der formalen Bildung in dieser Allgemeinheit von der Transferforschung widerlegt worden (vgl. auch PERKO 1987, S. 248f). Ähnliches hatten wir ja schon bei der Anwendung der Mathematik. Auch diese muß gelernt werden. Analoges gilt für die Fähigkeiten, die durch Beschäftigung mit Mathematik trainiert werden. Auch hier muß trainiert werden, diese auf außermathematische Gebiete anzuwenden.

PLATON sah dies anders. Für ihn diente Mathematik dem Wecken der Erkenntnis, sie fördert den intellektuellen Charakter und den Sinn für Schönheit. Bekannt ist die Inschrift über seiner Schule: „Niemand trete hier ein, der nichts von Geometrie versteht."

Einen ähnlichen Gedanken findet man bei FREUDENTHAL[4]: „Auch die anderen, die die Mathematik niemals anwenden werden, sollen Mathematik lernen, weil sie sie nötig haben, um ganz Mensch zu sein."

HEYMANN (1989) stellte einen Katalog auf, zu dem die Beschäftigung mit Mathematik befähigen soll:

[4]Ich habe das Zitat im Kopf, konnte aber leider die Quelle nicht finden.

- Vorbereitung auf künftige Lebenssituationen
- Stiftung kultureller Kohärenz
- Aufbau eines Weltbildes
- Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch
- Förderung von Phantasie und Kreativität
- Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft
- Stärkung des Schüler-Ichs

Einige seiner Punkte sollen im folgenden herausgegriffen bzw. ergänzt werden:

Mathematik dient insbesondere auch der Spracherziehung. Nirgendwo lernt man sonst sich so klar auszudrücken („Alles, was sich aussprechen läßt, läßt sich klar aussprechen" WITTGENSTEIN, 1989, S. 33), und nirgendwo sonst lernt man Texte so genau zu lesen wie in Mathematik (vgl. REICHEL 1991).

Der Mathematikunterricht kann auch zur Erziehung des moralischen Verhaltens dienen (vgl. ZECH 1983, S. 73, HANISCH 1984a, S. 86 u. 1985a, S. 5f), weil

- relative Selbständigkeit in der Mathematik eher denkbar ist, da es in diesem Unterrichtsgegenstand vor allem auf die Selbstkontrolle ankommt (bzw. ankommen sollte);
- gedankliche Disziplin eher möglich ist, da der Kontext im Vergleich zu anderen Fächern besser abgeschlossen ist;
- man einander besser zuhören kann, da man selbst weniger emotionell betroffen ist, und
- man auch eher Kritik vertragen kann (bzw. dies lernt), da es sich meist um sachliche Probleme handelt.

Desgleichen können die gestellten Aufgaben zu einem Nachdenkprozeß anregen. Einige Beispiele mögen dies veranschaulichen:

Drei Herren X, Y, Z haben sich gegenseitig so beleidigt, daß sich jeder mit jedem anderen duellieren will. Ihre Schießkünste werden wie folgt eingestuft:
X trifft immer, d.h. mit der Wahrscheinlichkeit 1,
Y trifft mit der Wahrscheinlichkeit 4/5,
Z trifft nur mit der Wahrscheinlichkeit 1/2.
Die Sekundanten einigen sich, ein sogenanntes „Triell" nach folgenden Regeln durchzuführen:

Es wird ausgelost, wer als erster und wer als zweiter schießen darf. In der dadurch festgelegten Reihenfolge wird dann reihum geschossen, bis nur noch einer übrig bleibt. Dem Schützen, der gerade an der Reihe ist, ist es jedoch völlig freigestellt, auf wen er schießt.
Wer hat die größten Überlebenschancen? Schätze zuerst!

Wenn Schülerinnen und Schüler mit dieser Aufgabe konfrontiert werden, ist anzunehmen, daß sie auf X tippen. Durchrechnen zeigt aber, daß Z die größten Überlebenschancen hat! Was kann man daraus lernen. Auch wenn man glaubt, die größten Chancen zu haben, sind andere Methoden der Konfliktbewältigung als Kampf allemal besser!

Die folgenden Beispiele stammen aus HANISCH u.a. (1995a u. b):

Um den Ernährungszustand eines Kindes im Alter von 1 bis 5 Jahren zu messen, wird der Umfang seines Oberarms gemessen, da der Armumfang in dieser Altersspanne nahezu unverändert bleibt. Ist der Armumfang kleiner als 12,5 cm, ist das Kind so stark unterernährt, daß Sofortmaßnahmen dringend erforderlich sind; ist der Armumfang hingegen größer als 13,5 cm, ist es ausreichend ernährt. Berechne den Durchmesser des Oberarms eines a) unterernährten, b) ausreichend ernährten Kindes!
Daran sollte eine Diskussion über den Hunger in Entwicklungsländern folgen!

Beispiel B: Im Jahr 1988 wurden weltweit rund $1,4 \cdot 10^{13}$ S für militärische Zwecke ausgegeben. Wieviel Schilling sind das pro Sekunde?
Lösung: 366 Tage zu je 24 Stunden zu je 3600 Sekunden ergeben $\frac{1,4 \cdot 10^{13}}{366 \cdot 24 \cdot 3600} \approx 4,4 \cdot 10^5$. Jede Sekunde wird rund $\frac{1}{2}$ Million S ausgegeben.

Berechne unter Verwendung von Beispiel B!

a) Um die Pocken weltweit auszurotten, wurden 6 Milliarden Schilling ausgegeben. Für wie lange könnte man mit diesem Betrag das Wettrüsten finanzieren? Schätze vorher ab!

b) Damit jeder Mensch genügend sauberes Wasser trinken könnte, wären etwa $3,9 \cdot 11^{11}$ S notwendig. Welchem Zeitraum des Wettrüstens entspricht dieser Betrag?

Auf der Erde lagern in den Waffenarsenalen Vernichtungsmittel mit einer Sprengkraft von 60 Milliarden Tonnen TNT (landläufig als Dynamit bezeichnet). 1 cm^3 Dynamit hat die Masse von 1,6 g. Angenommen, man teilt jedem Menschen die gleiche Menge Sprengstoff zu und stellt aus dieser Sprengstoffration einen Würfel her, welche Seitenlänge hat dieser dann?

Mathematik zeigt auch, daß Erkenntnis relativ ist, d.h., daß das Bessere der Feind des Guten ist. Sie verhilft dazu, das bisherige „gesicherte" Wissen aufzugeben, also den Standpunkt zu wechseln, vertraute Beziehungen aufbrechen, kombinieren und variieren zu können (vgl. BUSSMANN 1981). Man denke etwa an die schrittweise Erweiterung des Zahlensystems oder an die Verallgemeinerung des Pythagoreischen Lehrsatzes zum Kosinussatz.

Mathematik ist weiters ein Abbild der Politik, den letztere wäre ohne ein formales Regelsystem undenkbar (vgl. OSSIMITZ 1987, S. 249f).

Mathematik kann auch zum Kreativitätstraining verwendet werden. Aufgaben wie „Finde möglichst viele Lösungswege!" eignen sich hervorragend dazu (vgl. HANISCH 1982)

Der Mathematikunterricht hilft auch die eigenen Fähigkeiten zu erkennen und sei es nur, daß er zur Erkenntnis verhilft: „Mit dem möchte ich mich später nie mehr beschäftigen!" Nicht nur deswegen hat die Mathematiklehrerin bze der Mathematiklehrer „die Pflicht Forderungen zu stellen. Auf längere Sicht wird er diejenigen Schulfächer stundenmäßig verdrängen dürfen, die keinerlei Ziele für die Zukunft der Schüler[Innen] anstreben " (RÖTTEL, 1983, S. 22).

Die Bildungswirksamkeit des Mathematikunterrichts hängt von Ihnen ab. Wenn in Ihrem Unterricht die Schülerinnen und die Schüler Entdeckungen machen und ihre Beziehungen zur Mathematik aufbauen können und wenn weiters diese Beziehungen zwischen Mensch und Mathematik Ausgangspunkt für eine Wirklichkeitsaneignung sind, die Kreativität und Phantasie fordert und fördert, und dabei fächerverbindend und venetzend ist (vgl. KÖHLER 1993), ja dann beantwortet sich die eingangs gestellte Frage, wofür der Mathematikunterricht gut sei, von selbst. Denn Bildung ist auch, „sich dessen bewußt zu sein, daß man für den eigentlichen Lernprozeß letzlich selbst verantwortlich ist" (KRONFELLNER 1993, S. 108).

5 Literatur

BRANDON, P. R. u. JORDAN, C.: Gender differencies favoring Hawai'i girls in mathematics achievment: Recent finding and hypotheses. In: Zentralblatt der Didaktik der Mathematik, Heft 1, S. 18–21, 1994.

BUSSMANN, H.: Mathematische Fähigkeiten im didaktischen Prozeß – Erkenntnisvermögen und Unterricht. Paderborn, München, Wien u. Zürich 1981.

DÖRFLER, W. u. FISCHER, R. (Hrsg.): Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik. S. 75-82, Wien 1985.

FÜREDER, A.: Leistungskontrolle im Mathematikunterricht. Aus: RIEDL, J. (Hrsg.): Leistungsbeurteilung konkret in der Schule der 10- bis 14jährigen. S. 157–172, Linz 1980.

FÖLSCH, G.: Mathematikunterricht im Spannungsfeld der Erziehungswissenschaften. In: MNU, v 31 (5), S. 14–24, 1985.

GITTLER, G.: 3DW – Ein Rasch-skalierter Test zur Messung des räumlichen Vorstellungsvermögens. Weinheim 1990.

GITTLER, G.: Testpsychologische Aspekte der Raumvorstellungsforschung – Kritik, Lösungsansätze und empirische Befunde. Unveröff. Habil.schrift der Universität Wien 1992.

GITTLER, G.: Intelligenzförderung durch Schulunterricht. Darstellende Geometrie und räumliches Vorstellungsvermögen. Aus: GITTLER, G.: u.a. (Hrsg.): Die Seele ist ein weites Land. Aktuelle Forschung am Wiener Institut für Psychologie. Wien 1994, S. 105–123.

GITTLER, G. u.a. (Hrsg.): Die Seele ist ein weites Land. Aktuelle Forschung am Wiener Institut für Psychologie. Wien 1994.

HANISCH, G.: Kreativitätsförderung im Mathematikunterricht. Aus: GROSSER, S. (Hrsg.): Didaktik-Reihe der ÖMG, Heft 9, S. 71–88, 1982.

HANISCH, G.: Mathematik und Moral. Aus: GROSSER, S. (Hrsg.): Didaktik-Reihe der ÖMG, S. 61–96, Heft 11, 1984a.

HANISCH, G.: Visuelle Vorstellungen. Aus: KAUTSCHITZ, H. u. METZLER, W. (Hrsg.): Anschauung als Anregung zum mathematischen Tun. S. 122–132, Wien 1984b.

HANISCH, G.: Was kann der Mathematikunterricht zur Friedenserziehung beitragen? In: Beiträge zur historischen Sozialkunde, 15. Jg., Nr.1, S. 5 u. 6, 1985a.

HANISCH, G.: Was bleibt vom Mathematikunterricht hängen? Aus: DÖRFLER, W. u. FISCHER, R. (Hrsg.): Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik. S. 75–82, Wien 1985b.

HANISCH, G.: A discovery involving volume. In: The Mathematics Teacher, vol.78, nr.3, March 1985c.

HANISCH, G.: Mathematik und Raumvorstellung. Aus: DÖRFLER, W. u. FISCHER, R. (Hrsg.): Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik, S. 83–90. Wien 1985d.

HANISCH, G.: Veränderungen der Intelligenz Erwachsener durch geistige Arbeit – Längsschnittuntersuchungen an Studierenden des Zweiten Bildungswegs. In: Bundesgymnasium und Bundesrealgymnasium für Berufstätige Wien XV, Publikation Nr. 33, S. 29–34, 1985e.

HANISCH, G.: Förderung latenter Leistungsdimensionen – ein empirischer Nachweis. Aus: Beiträge zum Mathematikunterricht 1989. Vorträge auf der 23. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Berlin. Bad Salzdetfurth S. 171–174, 1989.

HANISCH, G.: Problematik der Leistungsfeststellungen durch schriftliche Arbeiten am Beispiel der Mathematik. Habil.schrift der Universität Wien 1990a.

HANISCH, G.: Rasch-Skalierung. Aus: KLEITER, E.F.: Lehrbuch der Statistik in Kmss. S. 350–388, Band 1/2. Weinheim 1990b.

HANISCH, G.: Schummeln – Ergebnisse einer Befragung von Wiener Schülerinnen und Schülern. In: Erziehung und Unterricht, S. 104–116, Heft 2, 1991.

HANISCH, G. u.a.: Ist gleich. HLA 1. Lehrbuch für Mathematik und angewandte Mathematik. Wien 1995a.

HANISCH, G. u.a.: Ist gleich. HLA 2. Lehrbuch für Mathematik und angewandte Mathematik. Wien 1995b.

HANISCH, G. u. SCHWENDENWEIN, W.: Zum Problem der pädagogischen Leistungsbeurteilung. In: Erziehung und Unterricht, S. 720–732, Heft 10, 1986.

HANISCH, G. u. SCHWENDENWEIN, W.: Allgemeinbildende Sekundarschule und neustrukturierte berufliche Bildung – Ein Organisationsmodell für die allgemeinbildenden Schulen der Zehn- bis Achtzehnjährigen unter Berücksichtigung eines sackgassenlosen Berufsausbildungssystems. Band 20 der Reihe Schulentwicklung, Wien 1990.

HEYMANN, H. W.: Allgemeinbildender Mathematikunterricht – was könnte das sein? In: mathematik lehren, Heft 33, S. 4–9, 1989.

HORN, W.: Leistungsprüfsystem. Göttingen 1983² (1962¹).

JOLLIFE, F. u. PONSFORD, R.A.: Classification and Comparison of mathematics examinations - method based on BLOOM's taxonomy. In: Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., Vol. 20, no. 5, S. 677-688, 1989.

KAUTSCHITZ, H. u. METZLER, W. (Hrsg.): Anschauung als Anregung zum mathematischen Tun. S. 122–132, Wien 1984.

KAISER-MESSMER, G.: Literaturbericht zu empirischen Untersuchungen über Anwendungen im Mathematikunterricht. In: Zentralblatt der Didaktik der Mathematik, Heft 6, S. 204–214, 1986.

KLEITER, E.F.: Lehrbuch der Statistik in Kmss. S. 350–388, Band 1/2. Weinheim 1990.

KÖHLER, H.: Ermöglichung von Allgemeinbildung im Mathematikunterricht. Aus: KÖHLER, H. u. RÖTTEL, K. (Hrsg.): Mehr Allgemeinbildung im Mathematikunterricht. Buxheim-Eichstätt 1993, S. 91–104.

KÖHLER, H. u. RÖTTEL, K. (Hrsg.): Mehr Allgemeinbildung im Mathematikunterricht. Buxheim-Eichstätt 1993.

KRONFELLNER, M.: Verhindert der traditionelle Unterrichtsstil Bildung im Mathematikunterricht? Aus: KÖHLER, H. u. RÖTTEL, K. (Hrsg.): Mehr Allgemeinbildung im Mathematikunterricht. Buxheim-Eichstätt 1993, S. 105–112.

LEHMANN, K.: Leistungssteigerung durch vielseitige Motivierung. In: Mathematik in der Schule, Heft 2/3, S. 151–169, Heft 4, S. 297–305, Heft 5, S. 370–377, 1981.

MESCHKOWSKI, H.: Mathematik als Bildungsgrundlage. Braunschweig 1965.

OLECHOWSKI, R.: Das alternde Gedächtnis. Bern u. Wien 1969.

OSSIMITZ, G.: Zum Verhältnis von Mathematik und politischer Bildung. In: Zentralblatt der Didaktik der Mathematik, Heft 6, S. 239–246, 1987.

PERKO, R.: Mathematik und politische Bildung. In: Zentralblatt der Didaktik der Mathematik, Heft 6, S. 246–251, 1987.

POLLIN, J. M.: Improving student awareness of the utility of mathematics. In: International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Heft 2, S. 245-250, 1980.

POSTEL, H., KIRSCH, A. u. BLUM, W. (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen. Hannover 1991.

REICHEL, H-C.: Sprachschulung und Spracheinsatz im Mathematikunterricht. Aus: POSTEL, H., KIRSCH, A. u. BLUM, W. (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen. Hannover 1991, S. 156–169.

REICHEL, H-C.: Bildung durch Mathematik. Aus: KÖHLER, H. u. RÖTTEL, K. (Hrsg.): Mehr Allgemeinbildung im Mathematikunterricht. Buxheim-Eichstätt 1993, S. 113–126.

REICHEL, H-C. u. HUMENBERGER, H.: Endbericht zum Forschungsprojekt Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht. Wien 1995.

RIEDL, J. (Hrsg.): Leistungsbeurteilung konkret in der Schule der 10- bis 14jährigen. S. 157–172, Linz 1980.

ROTH, D.: An experimental study to investigate the effects on achievement of sixth graders in mathematical problem solving using textbooks problems compared to problems constructed by the teacher. Diss. der University of Colorado 1982.

RÖDER, P.M. u. TREUMANN, K. (Hrsg.): Dimensionen der Schulleistung. Stuttgart 1974.

RÖTTEL, K.: Legitimation und Auftrag des Mathematikunterrichts. In: Praxis der Mathematik, 1983, Heft 25, S. 17–22.

SCHWENDENWEIN, W.: Theorie des Unterrichtens, der Unterrichtsvorbereitung und des Prüfens. Wien 1994^5.

THIELICKE, H.: Auf Kanzel und Katheder. Hamburg 1965.

THURLER, M.: Einige Überlegungen zur Einführung in die Thematik der „neuverstandenen Schülerbeurteilung". Aus: Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren - Pädagogische Kommission - Ausschuß Mathematik (Hrsg.): Schülerbeurteilung im Mathematikunterricht. Informationsbulletin Nr. 47a. S. 9-20, Bern 1985.

TREUMANN, K.: Leistungsdimensionen im Mathematikunterricht. Aus: RÖDER, P.M. u. TREUMANN, K. (Hrsg.): Dimensionen der Schulleistung. Stuttgart 1974.

WAHLEN, M.: Schule im Spannungsfeld zwischen Leistungsgesellschaft und Mensch. Aus: SCHWEIZERISCHE KONFERENZ der kantonalen Erziehungsdirektoren - Pädagogische Kommission - Ausschuß Mathematik (Hrsg.): Schülerbeurteilung im Mathematikunterricht. Informationsbulletin Nr. 47a. S. 61-64, Bern 1985.

WINGERT, O.: Differenzierung - Mathematik (Überlegungen zum Problem der Leistungsdifferenzierung). In: Erziehung und Unterricht, Heft 6, S. 382-392, Juni 1983.

WITTGENSTEIN, L.: Tractatus logico-philosophicus, Tagebücher 1914-1916, Philosophische Untersuchungen. Frankfurt am Main 1989[6].

WITTMANN, E. CH.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig 1981[6].

ZECH, F.: Grundkurs Mathematikdidaktik - Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen im Fach Mathematik. Weinheim 1983[4].

Adresse:

Günter HANISCH

Ludwig Boltzmann-Institut für Schulentwicklung und international-vergleichende Schulforschung, Garnisongasse 3, 1090 Wien

Mathematisches Institut der Universität Wien, Strudlhofgasse 4, 1090 Wien.